2025 年全国统一高考数学试卷（新高考II）

参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 2，8，14，16，20 平均数为（　　）

A. 8　　B. 9　　C. 12　　D. 18

【答案】C

【解答】$\bar{x}=\dfrac{2+8+14+16+20}{5}=12$

2. $z=1+i$，$\dfrac{1}{z-1}=$（　　）

A. $-i$　　B. i　　C. -1　　D. 1

【答案】A

【解答】$\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{1+i-1}=\dfrac{1}{i}=-i$.

3. $A=\{-4,0,1,2,8\}$　$B=\{x\mid x^3=x\}$，$A\cap B=$（　　）

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,2,8\}$　　C. $\{2,8\}$　　D. $\{0,1\}$

【答案】D

【解答】$B=\{x\mid x(x-1)(x+1)=0\}=\{0,-1,1\}$，$A\bigcap B=\{0,1\}$.

4. $\dfrac{x-4}{x-1}\geq 2$解集是（　　）

A. $\{x\mid -2\leq x\leq 1\}$　　B. $\{x\mid x\leq -2\}$　　C. $\{x\mid -2\leq x<1\}$　　D. $\{x\mid x>1\}$

【答案】C

【解答】

$$\frac{x-4}{x-1}\geq 2\Leftrightarrow\frac{x-4}{x-1}-2\geq 0\Leftrightarrow\frac{-x-2}{x-1}\geq 0\Leftrightarrow -(x+2)(x-1)\geq 0\text{且}x-1\neq 0\Leftrightarrow -2\leq x<1.$$

5. $\triangle ABC$，$BC=2$，$AC=1+\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{6}$，$A=$（　　）

A. 45°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 135°

【答案】A

【解答】由余弦定理

$$\cos A=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\cdot AB}=\frac{(1+\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2-2^2}{2\times(1+\sqrt{3})\times\sqrt{6}}=\frac{2(\sqrt{3}+3)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+3)}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$A\in(0,\pi)$，故 $A=\dfrac{\pi}{4}$.

6. 抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 焦点 F，$A\in C$，过 A 作 C 准线的垂线，垂足为 B.若 $l_{BF}:y=-2x+2$，则 $|AF|=$（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

【答案】C

【解答】$l_{BF}:y=-2x+2$ 与 x 轴交于 F 点，则 $F(1,0)$，

故 $\dfrac{p}{2}=1\Leftrightarrow p=2\Leftrightarrow C:y^2=4x$ ；

设 $l_{BF}:y=-2x+2$ 与 y 轴交于 N 点，则 $N(0,2)$；

准线与 x 轴交于 M 点，由 $\triangle FON\sim\triangle FMB$，$MB=2NO=4$，故 $y_A=4$，

代入 $C:y^2=4x$ 得 $x_A=4$，$A(4,4)$，$|AF|=\sqrt{(4-1)^2+4^2}=5$

7. S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和，$S_3=6$，$S_5=-5$，$S_6=$（　　）

A. -20　　B. -15　　C. -10　　D. -5

【答案】B

【解答】S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，故 $\{\dfrac{S_n}{n}\}$ 为等差数列，该等差数列的公差为 d_1

$$\frac{S_5}{5}-\frac{S_3}{3}=2d_1\Rightarrow d_1=-\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{S_6}{6}=\frac{S_5}{5}+d_1=-1-\frac{3}{2}\Rightarrow S_6=-15.$$

8. $0<\alpha<\pi$，$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{5}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{10}$　　D. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

【答案】D

【解答】

$\because \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=-\frac{3}{5}$，

又$\because 0<\alpha<\pi$，

$\therefore \sin\alpha=\frac{4}{5}$，

则$\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的 0 分。

9. S_n为等比数列$\{a_n\}$前n项和，q为$\{a_n\}$公比，$q>0$，$S_3=7$，$a_3=1$，则（　　）

A. $q=\frac{1}{2}$　　B. $a_5=\frac{1}{9}$　　C. $S_5=8$　　D. $a_n+S_n=8$

【答案】AD

【解答】由已知条件

$$S_3=a_1+a_2+a_3=\frac{a_3}{q^2}+\frac{a_3}{q}+a_3=\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+1=7\Rightarrow\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}-6=0\Rightarrow(\frac{1}{q}+3)(\frac{1}{q}-2)=0$$

又$q>0$，则$\frac{1}{q}=2\Rightarrow q=\frac{1}{2}$，

故$a_1=\frac{a_3}{q^2}=4,a_n=4\times(\frac{1}{2})^{n-1}=(\frac{1}{2})^{n-3},S_n=8-(\frac{1}{2})^{n-3}$，

$a_5=a_3q^2=\frac{1}{4},S_5=8-(\frac{1}{2})^2\neq 8,a_n+S_n=(\frac{1}{2})^{n-3}+8-(\frac{1}{2})^{n-3}=8$，

综上AD正确.

10. $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上奇函数， $x>0$ 时， $f(x)=(x^2-3)e^x+2$，则（　　）

A. $f(0)=0$

B. 当 $x<0$ 时， $f(x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$

C. $f(x)\ge 2$ 当且仅当 $x\ge\sqrt{3}$

D. $x=-1$ 是 $f(x)$ 极大值点

【答案】ABD

【解答】 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，故 $f(0)=0$，A 正确；

$x<0$ 时， $-x>0$，故 $f(-x)=[(-x)^2-3]e^{-x}+2=(x^2-3)e^{-x}+2$，

$f(x)=-f(-x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$，B 正确；

$x>0$ 时， $f(x)=(x^2-3)e^x+2\Rightarrow f'(x)=(x+3)(x-1)e^x$， $f'(1)=0$；

$0<x<1$ 时 $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减， $x>1$ 时 $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增，故 $x=1$ 为 $f(x)$ 极小值点，由 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，故 $x=-1$ 为 $f(x)$ 极大值点，D 正确；

$f(-1)=2e-2=2(e-1)>2$，C 错.

11. 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 左右焦点为 F_1， F_2，左右顶点为 A_1， A_2 .以 F_1F_2 为直径的圆与 C 的一条渐近线交于 M ， N ，且 $\angle NA_1M=\dfrac{5\pi}{6}$，则（　　）

A. $\angle A_1MA_2=\dfrac{\pi}{6}$

B. $|MA_1|=2|MA_2|$

C. C 离心率为 $\sqrt{13}$

D. 当 $a=\sqrt{2}$ 时，四边形 NA_1MA_2 面积为 $8\sqrt{3}$

【答案】ACD

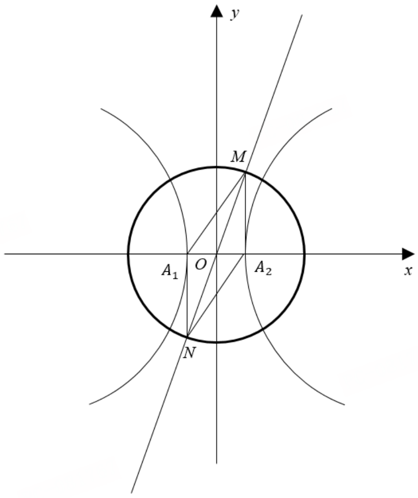
【解答】

由对称性不妨取斜率为正的渐近线$l_{MN}: y=\frac{b}{a}x$，

又 $MO=r=c$，则易知 $M(a,b)$，又 $A_1(-a,0)$，

$A_2(a,0)$，

则 $MA_2 \perp A_1A_2$，如图



$\angle A_1MA_2=\pi-\angle NA_1M=\frac{\pi}{6}$，A 选项正确；

则在 $Rt\triangle A_1MA_2$ 中，$\left|MA_1\right|=\frac{2}{\sqrt{3}}\left|MA_2\right|$，B 选项错误，

$\because \tan\angle A_1MA_2=\frac{2a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

则 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{13}$，C 选项正确；

当 $a=\sqrt{2}$ 时，$S_{NA_1MA_2}=2\times\frac{1}{2}\left|A_1A_2\right|\cdot\left|MA_2\right|=2ab=8\sqrt{3}$ ，D 选项正确.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12． $\vec{a}=(x,1)$，$\vec{b}=(x-1,2x)$，$\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})$ 则 $\left|\vec{a}\right|=$ ____.

【答案】$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2}$

【解答】$\vec{a}-\vec{b}=(1,1-2x)$，$\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})\Leftrightarrow\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0\Leftrightarrow x+1-2x=0\Rightarrow x=1$.、

所以 $\vec{a}=(1,1)$，即 $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2}$

13． $x=2$ 是 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ 的极值点，则 $f(0)=$____ .

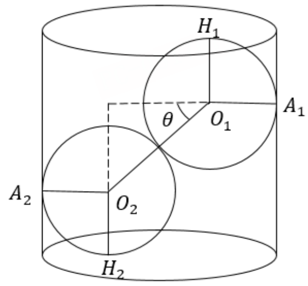
【答案】-4

【解答】$f'(x)=(x-2)(x-a)+(x-1)(x-a)+(x-1)(x-2)$，

若 $x=2$ 为 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(2)=2-a=0\Rightarrow a=2$.

$f(x)=(x-1)(x-2)^2\Rightarrow f(0)=-1\times4=-4$

14．一个底面半径为$4cm$，高为$9cm$的封闭圆柱形容器内有两个半径相等的铁球.则铁球半径的最大值为______cm



【答案】$\dfrac{5}{2}$

【解答】

设铁球半径为r，两铁球位置如图所示，

竖直方向有，$h = O_1H_1 + O_1O_2 \cdot \sin\theta + O_2H_2$，

即$9 = 2r + 2r\sin\theta$，

水平方向有，$2r = A_1O_1 + O_1O_2 \cdot \cos\theta + A_2O_2$，

即$8 = 2r + 2r\cos\theta$，则$(9-2r)^2 + (8-2r)^2 = 4r^2$

化简得：$4r^2 - 68r + 145 = 0$，$(2r-29)(2r-5) = 0$，

解得：$r = \dfrac{5}{2}$，$r = \dfrac{29}{2}$（舍）

故答案为：$\dfrac{5}{2}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）$f(x) = \cos(2x+\varphi)(0 \le \varphi < \pi), f(0) = \dfrac{1}{2}$

（1）求φ；

（2）$g(x) = f(x) + f(x - \dfrac{\pi}{6})$，求$g(x)$的值域和单调区间.

【解答】解：（1）$f(0) = \cos\varphi = \dfrac{1}{2}$，由$0 \leqslant \varphi < \pi$，故$\varphi = \dfrac{\pi}{3}$；

（2）$f(x) = \cos(2x + \dfrac{\pi}{3})$，$f(x - \dfrac{\pi}{6}) = \cos 2x$，$g(x) = f(x) + f(x - \dfrac{\pi}{6}) = \sqrt{3}\cos(2x + \dfrac{\pi}{6})$

故$g(x)$的值域为$\left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$，

令$2k\pi \leqslant 2x + \dfrac{\pi}{6} \leqslant \pi + 2k\pi$，解得$-\dfrac{\pi}{12} + k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{12} + k\pi$，

即$g(x)$的单调递减区间为$\left[-\dfrac{\pi}{12} + k\pi, \dfrac{5\pi}{12} + k\pi\right]$，$k \in \mathbf{Z}$

同理可得$g(x)$的单调递增区间为$\left[\dfrac{5\pi}{12} + k\pi, \dfrac{11\pi}{12} + k\pi\right]$，$k \in \mathbf{Z}$

16.（15 分）椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，长轴长为$4$.

（1）求C的方程；

（2）过点$\left(0,-2\right)$的直线l与C交于A,B两点，O为坐标原点，若$S_{\triangle OAB}=\sqrt{2}$，求$\left|AB\right|$.

【解答】（1）$a=2$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2}$，椭圆方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$；

（2）设$l:y=kx-2$，点$P\left(0,-2\right)$，点$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=kx-2\end{cases}$可得：$(2k^2+1)x^2-8kx+4=0$，其判别式为$\Delta=32k^2-16$，

$x_1+x_2=\dfrac{8k}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{4}{2k^2+1}>0$（两根同号），

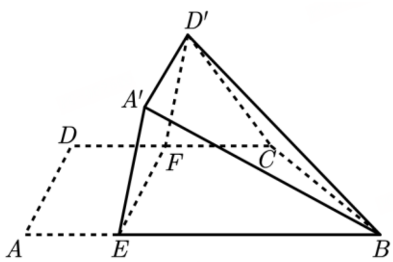
由$\Delta>0$，可得$k>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$或$k<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OPB}-S_{\triangle OPA}=\dfrac{1}{2}\times2\left|x_2\right|-\dfrac{1}{2}\times2\left|x_1\right|=\left|x_2-x_1\right|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2k^2+1}=\sqrt{2}$，

解得$k^2=\dfrac{3}{2}$，

$\left|AB\right|=\sqrt{k^2+1}\left|x_2-x_1\right|=\sqrt{\dfrac{5}{2}}\times\sqrt{2}=\sqrt{5}$.

17.（15 分）. 如图，四边形$ABCD$中，$AB\parallel CD$，$\angle DAB=90^{\circ}$，F为CD中点，E在AB上，$EF\parallel AD$，$AB=3AD,CD=2AD$。将四边形$EFDA$沿EF翻折至四边形$EFD'A'$，使得面$EFD'A'$与面$EFCB$所成的二面角为60°



（1）证明：$A'B\parallel$平面$CD'F$；

（2）求面BCD'与面$EFD'A'$所成二面角的正弦值.

【解答】（1）由$EB//FC$，$A'E//D'F$，$A'E\cap EB=E$，

$D'F\cap CF=F$

$A'E\subset$平面$A'EB$，$EB\subset$平面$A'EB$，

$D'F\subset$平面$D'FC$，$CF\subset$平面$D'FC$，

可得平面$A'EB$ // 平面$D'FC$，又由$A'B\subset$平面$D'FC$

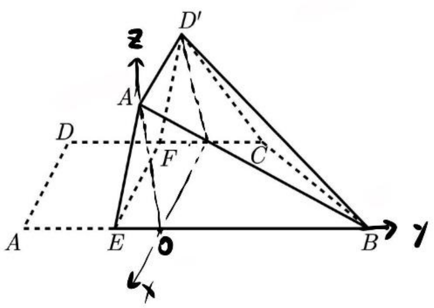
故$A'B$ // 平面$A'EB$；

（2）由 $EF\perp A'E$ 且 $EF\perp EB$，可知 $A'EB$ 即为二面角的平面角，为 60°

不妨设 $AD=1$，在平面 $A'EB$ 内，由点 A' 作 EB 垂线，垂足为 O，

可证 $A'O\perp$ 底面 $EBCF$， $EO=\frac{1}{2}$， $OB=\frac{3}{2}$

如图建系，



$\overrightarrow{FE}=(1,0,0)$， $\overrightarrow{EA'}=(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，设平面 $EFD'A'$ 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$

则有 $\begin{cases} x_1=0 \\ \frac{1}{2}y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0 \end{cases}$，取 $y_1=-\sqrt{3}$， $\overrightarrow{n_1}=(0,-\sqrt{3},1)$；

$\overrightarrow{CB}=(1,1,0)$ ， $\overrightarrow{D'B}=(1,\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$ ， 设 平 面 BCD' 的 法 向 量 为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$ ， 则 有

$\begin{cases} x_2+y_2=0 \\ x_1+\frac{3}{2}y_1-\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0 \end{cases}$，取 $y_2=\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{n_2}=(-\sqrt{3},\sqrt{3},1)$

即平面 BCD' 与平面 $EFD'A'$ 成角 θ，则有 $\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\times\left|\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}\right|=\frac{\sqrt{7}}{7}$，故 $\sin\theta=\frac{\sqrt{42}}{7}$.

18.（17 分） $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-kx^3,0<k<\frac{1}{3}$.

（1）证明： $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 存在唯一极值点和唯一零点；

（2）设 x_1， x_2 为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的极值点和零点；

（i） $g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)$ 。证明： $g(t)$ 在 $(0,x_1)$ 单调递减.

（ii）比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小，并证明.

【解答】（1）证明：因为 $f(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{1}{2}x^2-kx^3$， $k\in(0,\dfrac{1}{3})$，

所以 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x-3kx^2$

$=\dfrac{1-1-x+x+x^2-3kx^2-3kx^3}{1+x}$

$=\dfrac{-3kx^2}{1+x}(x+1-\dfrac{1}{3k})$，

当 $x>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{3k}-1>0$，

所以当 $0<x<\dfrac{1}{3k}-1$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增；

当 $x>\dfrac{1}{3k}-1$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减，

所以 $x=\dfrac{1}{3k}-1$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上唯一的极值点，是极大值点.

又因为 $f(\dfrac{1}{3k}-1)>f(0)=0$， $f(\dfrac{1}{2k})=\ln(1+\dfrac{1}{2k})-\dfrac{1}{2k}<0$，

所以 $\exists x_2\in(\dfrac{1}{3k}-1,\dfrac{1}{2k})$， $f(x_2)=0$，

即 x_2 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上唯一的零点；

（2）解：（i）因为 $g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)$，

所以 $g'(t)=f'(x_1+t)+f'(x_1-t)$

$=\dfrac{-3k(x_1+t)^2}{1+x_1+t}(x_1+t-x_1)+\dfrac{-3k(x_1-t)^2}{1+x_1-t}(x_1-t-x_1)$

$=3kt\left[\dfrac{(x_1-t)^2}{1+x_1+t}+\dfrac{(x_1+t)^2}{1+x_1-t}\right]$

$=\dfrac{6kt^2(t^2-x_1{}^2-2x_1)}{(1+x_1)^2-t^2}$，

因为 $t\in(0,x_1)$，所以 $t^2-x_1{}^2-2x_1<0$， $(1+x_1)^2-t^2>0$，

所以 $g'(t)=\dfrac{6kt^2(t^2-x_1{}^2-2x_1)}{(1+x_1)^2-t^2}<0$，

即 $g(t)$ 在 $t\in(0,x_1)$ 上单调递减；

（ii）由（i）得， $g(t)$ 在 $t\in(0,x_1)$ 上单调递减，

所以 $g(x_1) < g(0)$，

即 $f(2x_1) - f(0) < f(x_1) - f(x_1) = 0$， $f(2x_1) < 0$，

因为 x_2 是 $f(x)$ 的零点，所以 $f(x_2) = 0$，

所以 $f(2x_1) < f(x_2)$，

又因为 $x_2 > x_1$， $2x_1 > x_1$，且 $f(x)$ 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递减，

所以 $2x_1 > x_2$.

19．（17 分）

甲、乙乒乓球练习，每个球胜者得 1 分，负者得 0 分。设每个球甲胜的概率为 $p(\frac{1}{2} < p < 1)$，乙胜的概率为 q， $p + q = 1$，且各球胜负独立。对正整数 $k \geq 2$，记 p_k 为打完 k 个球后，甲比乙至少多得 2 分的概率， q_k 为打完 k 个球后乙比甲至少多得 2 分的概率。

（1）求 p_3, p_4（用 p 表示）；

（2）若 $\dfrac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = 4$，求 p；

（3）证明：对任意正整数 m， $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$.

【解答】（1）3 球后甲比乙至少多两分，只能是甲 3 分乙 0 分，因此$p_3 = p^3$;

4 球后甲比乙至少多两分，可能是甲 4 分乙 0 分，或者甲 3 分乙 1 分，

因此$p_4 = C_4^3 p^3 q + p^4 = 4p^3 q + p^4 = 4p^3(1-p) + p^4 = 4p^3 - 3p^4$.

(2) 根据对称性，以及（1）的结果，可得$q_3 = q^3, q_4 = 4q^3 - 3q^4$.

因此$\frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = \frac{4p^3 - 3p^4 - p^3}{4q^3 - 3q^4 - q^3} = \frac{3p^3(1-p)}{3q^3(1-q)} = \frac{p^3 q}{q^3 p} = \frac{p^2}{q^2} = 4$

因此$\frac{p}{q} = 2$，又$p + q = 1$，故$p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}$.

答案为$p = \frac{2}{3}$

（3）记$a_m(x)$表示m球甲得x分的概率

$$p_{2m+1} = p_{2m} - q \cdot a_{2m}(m+1)$$
$$q_{2m+1} = q_{2m} - p \cdot a_{2m}(m-1)$$

故

$$p_{2m+1}-p_{2m}=-q\cdot a_{2m}(m+1)$$
$$q_{2m+1}-q_{2m}=-p\cdot a_{2m}(m-1)$$
故要证：
$$p_{2m+1}-p_{2m}<q_{2m+1}-q_{2m}$$
只需证：
$$p\cdot a_{2m}(m-1)<q\cdot a_{2m}(m+1)$$
即只需证：
$$p\cdot p^{m-1}\cdot q^{m+1}\cdot C_{2m}^{m-1}<q\cdot p^{m+1}\cdot q^{m-1}\cdot C_{2m}^{m+1}$$
即只需证：
$$p^m q^{m+1}<q^m p^{m+1}$$
即$q<p$. 由条件$q=1-p \ <\frac{1}{2}<p$，故结论成立.

由
$$p_{2m+2}=p_{2m+1}+p\cdot a_{2m+1}(m+1)=p_{2m}+p\cdot a_{2m+1}(m+1)-qa_{2m}(m+1)$$
$$q_{2m+2}=q_{2m+1}+q\cdot a_{2m+1}(m)=q_{2m}+q\cdot a_{2m+1}(m)-pa_{2m}(m-1)$$
现在考虑右边的不等式
$$p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$$
只需证:
$$p\cdot a_{2m+1}(m+1)-qa_{2m}(m+1)>qa_{2m+1}(m)-p\cdot a_{2m}(m-1)$$
只需证：
$$p^{m+2}q^m C_{2m+1}^{m+1}-p^{m+1}q^m C_{2m}^{m+1}>q^{m+2}p^m C_{2m+1}^{m+1}-q^{m+1}p^m C_{2m}^{m+1}$$
只需证：
$$p^2 C_{2m+1}^{m+1}-pC_{2m}^{m+1}>q^2 C_{2m+1}^{m+1}-qC_{2m}^{m+1}$$
只需证:
$$(p-q)(p+q)C_{2m+1}^{m+1}>(p-q)C_{2m}^{m+1}$$
只需证:
$$C_{2m+1}^{m+1}>C_{2m}^{m+1}$$
因为 $C_{2m+1}^{m+1}=C_{2m}^{m+1}+C_{2m}^{m}$ ，且$C_{2m}^{m}>0$，故上面不等式成立．证毕.