2025 年全国统一高考数学试卷（新高考Ⅰ）

参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $(1+5i)i$ 的虚部为（　　）

A. -1　　　　B. 0　　　　C. 1　　　　D. 6

【答案】C

【解答】$(1+5i)i=-5+i$，故虚部为 1.

2. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，集合 $A=\{1,3,5\}$，则 $\complement_U A$ 中元素个数为（　　）

A. 0　　　　B. 3　　　　C. 5　　　　D. 8

【答案】C

【解答】$C_U A=\{2,4,6,7,8\}$，元素个数为 5

3. 若双曲线 C 的虚轴长为实轴长的 $\sqrt{7}$ 倍，则 C 的离心率为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　　　B. 2　　　　C. $\sqrt{7}$　　　　D. $2\sqrt{2}$

【答案】D

【解答】实轴长 $2a$，虚轴长 $2b$，

$$2b=\sqrt{7}(2a)\Rightarrow b=\sqrt{7}a\Rightarrow c^2=a^2+b^2=a^2+7a^2=8a^2\Rightarrow e=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

4. 若点 $(a,0)(a>0)$ 是函数 $y=2\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一个对称中心，则 a 的最小值为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　　　B. $\frac{\pi}{3}$　　　　C. $\frac{\pi}{2}$　　　　D. $\frac{3\pi}{4}$

【答案】B

【解答】$(a,0)$ 为 $y=2\tan(x-\frac{\pi}{3})$ 的对称中心，

则 $a-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，即 $a=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

又 $a>0$，故 $k=0$时，$a_{\min}=\dfrac{\pi}{3}$.

5. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的偶函数，当 $2\le x\le 3$ 时，$f(x)=5-2x$，则 $f(-\dfrac{3}{4})=$（　　）

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

【答案】A

【解答】$f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上偶函数且周期为 2，

则 $f(-\dfrac{3}{4})=f(\dfrac{3}{4})=f(\dfrac{3}{4}+2)=f(\dfrac{11}{4})$；

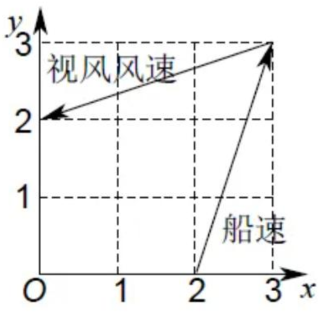
当 $2\le x\le 3$ 时，$f(x)=5-2x$，

则 $f(\dfrac{11}{4})=5-2\times\dfrac{11}{4}=-\dfrac{1}{2}$，故 $f(-\dfrac{3}{4})=-\dfrac{1}{2}$.

6.帆船比赛中，运动员可借助风力计测定风速的大小和方向，测出的结果在航海学中称为视风风速，视风风速对应的向量，是真风风速对应的向量与船行风速对应的向量之和，其中船行风速对应的向量与船速对应的向量大小相等，方向相反. 图 1 给出了部分风力等级、名称与风速大小的对应关系. 已知某帆船运动员在某时刻测得的视风风速对应的向量与船速对应的向量如图 2(风速的大小和向量的大小相同，单位 m/s)，则真风为（　　）

A.轻风　　B.微风　　C.和风　　D.劲风

等级	风速大小	名称
2	1.1～3.3	轻风
3	3.4～5.4	微分
4	5.5～7.9	和风
5	8.0～10.1	劲风



【答案】A

【解答】设视风风速对应的向量为 $\vec{a}$，真风风速对应的向量为 $\vec{b}$，船行风速对应的向量为 $\vec{c}$，则船速对应的向量为 $-\vec{c}$，$\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$

由图得，$\vec{a}=\left(-3,-1\right)$，$-\vec{c}=\left(1,3\right)$，即$\vec{c}=\left(-1,-3\right)$

所以$\vec{b}=\vec{a}-\vec{c}=\left(-2,2\right)$，$\left|\vec{b}\right|=2\sqrt{2}\in\left(1.1,3.3\right)$

所以属于轻风。

7. 若圆$x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$上到直线$y=\sqrt{3}x+2$的距离为 1 的点有且仅有 2 个，则r的取值范围是（　　）

A. $(0,1)$　　　　B. $(1,3)$　　　　C. $(3,+\infty)$　　　　D. $(0,+\infty)$

【答案】B

【解答】圆心为$(0,-2)$，圆心到直线$\sqrt{3}x-y+2=0$的距离$d=\dfrac{|2+2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=2$.

①当圆很小且与直线无交点时，圆上的点到直线的最小距离为$d-r$，

$d-r<1\Rightarrow r>1$时，圆上距离直线最近点的两侧，刚好有两点满足到直线的距离为 1；

②当圆变大到与直线有交点时，圆上优弧一侧一定有两点满足到直线的距离为 1，

在劣弧一侧，到直线的最大距离为$r-d$，劣弧上的点到直线的距离必须小于 1，

故$r-d<1\Rightarrow r<3$；

综上，$r\in(1,3)$

8. 若实数x,y,z满足$2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z$，则$x,y,z$的大小关系不可能是（　　）

A. $x>y>z$　　　　B. $x>z>y$　　　　C. $y>x>z$　　　　D. $y>z>x$

【答案】B

【解答】解：$2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z=t$，

当$x=1$时，$t=2$，所以$y=\dfrac{1}{3}$，$z=\dfrac{1}{5^3}=\dfrac{1}{125}$，此时$x>y>z$，A 正确；

当$x=8$时，$t=5$，所以$y=9$，$z=1$，此时$y>x>z$，C 正确；

当$x=2^6=64$时，$t=8$，所以$y=3^5=243$，$z=5^3=125$，此时$y>z>x$，D 正确，

故选：B

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的 0 分。

9. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为 BC 中点，则（　　）

A. $AD\perp A_1C$

B. $B_1C_1\perp$ 平面 AA_1D

C. $AD\parallel A_1B_1$

D. $CC_1\parallel$ 平面 AA_1D

【答案】BD

【解答】三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为正三棱柱，

故侧棱垂直于底面，且上下底面均为正三角形.

D 为 BC 中点，取 B_1C_1 中点 D_1，则 $A_1D_1//AD$，$A_1D_1\perp B_1C_1$，

又 $BB_1\perp 面A_1B_1C_1$，则 $BB_1\perp A_1D_1$，

$BB_1\cap B_1C_1=B_1, BB_1、B_1C_1\subset 面B_1C_1CB\Rightarrow A_1D_1\perp 面B_1C_1CB$，

连接 CD_1，则 $A_1D_1\perp CD_1$，在直角 $\triangle A_1CD_1$ 中，A_1D_1 不可能与 A_1C 垂直，

即 AD 不可能与 A_1C 垂直，故 A 错；

$DD_1//B_1B$，故 $DD_1\perp 面A_1B_1C_1\Rightarrow DD_1\perp B_1C_1$，又 $A_1D_1\perp B_1C_1$，$A_1D_1\cap DD_1=D_1$，

则 $B_1C_1\perp 面A_1D_1DA$，B 正确；

$CC_1//DD_1$，$CC_1\not\subset 面A_1D_1DA\Rightarrow CC_1//面A_1D_1DA$，D 正确；

$A_1D_1//AD$，$A_1D_1\cap A_1B_1=A_1$，故 AD 与 A_1B_1 不平行，C 错.

10. 设抛物线$C: y^2=6x$的焦点为F，过F的直线交C于A,B，过A作$l: x=-\frac{3}{2}$的垂线交于D，过F且垂直于AB的直线交l于E，则（　　）

A. $|AD|=|AF|$

B. $|AE|=|AB|$

C. $|AB|\geq 6$

D. $|AE|\cdot|BE|\geq 18$

【答案】ACD

【解答】

抛物线$C: y^2=6x$，焦点$F\left(\frac{3}{2},0\right)$，准线$l: x=-\frac{3}{2}$，

A在抛物线上，所以$AD=AF$，故 A 正确；

$AB=x_1+x_2+p\geq 2p=6$，故 C 正确；

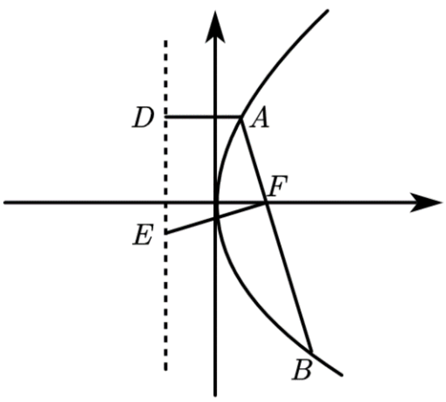
当$A\left(\frac{3}{2},3\right),B\left(\frac{3}{2},-3\right)$时，$E\left(-\frac{3}{2},0\right)$，

此时$AB=6$，$AE=3\sqrt{2}$，故 B 错误；

根据抛物线结论

$AE\cdot BE=EF\cdot AB=\frac{p}{\sin\theta}\cdot\frac{2p}{\sin^2\theta}=\frac{18}{\sin^3\theta}$

所以$|AE|\cdot|BE|$的最小值为 18，故 D 正确。



11. 已知$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{4}$，若$\cos 2A+\cos 2B+2\sin C=2$，$\cos A\cos B\sin C=\frac{1}{4}$，则（　　）

A. $\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B$

B. $AB=\sqrt{2}$

C. $\sin A+\sin B=\frac{\sqrt{6}}{2}$

D. $AC^2+BC^2=3$

【答案】ABC

【解答】$\cos 2A+\cos 2B+2\sin C=2-2\sin^2 A-2\sin^2 B+2\sin C=2$，

所以$\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B$，故 A 正确；

$\sin\left(A+B\right)=\sin^2 A+\sin^2 B=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

移项得$\sin A\left(\sin A-\cos B\right)+\sin B(\sin B-\cos A)=0$——①

若$A+B<\frac{\pi}{2}$，则$A<\frac{\pi}{2}-B, B<\frac{\pi}{2}-A$

即$\sin A<\cos B, \sin B<\cos A$，①式不成立，

同理，若$A+B>\frac{\pi}{2}$，①式也不成立，

所以$A+B=\frac{\pi}{2}$

所以$\cos A\cos B=\frac{1}{4}$，所以$\sin B\cos B=\frac{1}{4}$，所以$\sin 2B=\frac{1}{2}$

不妨令$2B=\frac{\pi}{6}$，则$B=\frac{\pi}{12}$，$A=\frac{5\pi}{12}$，

$S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}c^2\sin A\sin B=\frac{1}{2}c^2\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{8}c^2=\frac{1}{4}$

所以$c^2=2$，即$AB=\sqrt{2}$，故 B 正确

$\sin A+\sin B=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，故 C 正确

$AC^2+BC^2=AB^2=2$，故 D 错误。

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 若直线 $y=2x+5$ 是曲线 $y=e^{x}+x+a$ 的切线，则 $a=$________.

【答案】4

【解答】$y'=e^{x}+1$，$k=y'=e^{x}+1=2\Rightarrow x=0$，切点 $(0,5)$，故

$y|_{x=0}=e^{0}+0+a=5\Rightarrow a=4$

13. 若一个正项等比数列的前 4 项和为 4，前 8 项和为 68，则该等比数列的公比为________.

【答案】2

【解答】$a_5+a_6+a_7+a_8=S_8-S_4=64, S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=4$，

$$q^{4}=\frac{a_5+a_6+a_7+a_8}{a_1+a_2+a_3+a_4}=\frac{64}{4}=16, q>0\Rightarrow q=2$$

14. 一个箱子里有 5 个球，分别以 1~5 标号，若有放回取三次，每次取一个球，记至少取出一次的球的个数为 X，则 $E(X)=$________.

【答案】$\dfrac{61}{25}$

【解答】解：有放回取 3 次，每次取 1 个球，则结果：

有 3 个球编号都一样，此时 $X=1$，$P(X=1)=\dfrac{C_5^1\cdot 1\cdot 1}{C_5^1C_5^1C_5^1}=\dfrac{1}{25}$；

3 个球中有 2 个编号一样，3 次摸球中有 1 次与另外 2 次不一样，

则此时 $X=2$，$P(X=2)=\dfrac{C_3^1\cdot C_5^1C_4^1\cdot 1}{C_5^1C_5^1C_5^1}=\dfrac{12}{25}$；

3 个球编号都不一样，此时 $X=3$，$P(X=3)=\dfrac{C_5^1C_4^1C_3^1}{C_5^1C_5^1C_5^1}=\dfrac{12}{25}$，

所以 $EX=1\cdot P(X=1)+2\cdot P(X=2)+3\cdot P(X=3)=\dfrac{61}{25}$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分） 为研究某疾病与超声波检查结果的关系，从做过超声波检查的人群中随机调查了 1000 人，得到如下的列联表：

	正常	不正常	合计
患该疾病	20	180	200
未患该疾病	780	20	800
合计	800	200	1000

(1)记超声波检查结果不正常者患有该疾病的概率为 p，求 p 的估计值；

(2)根据小概率值$\alpha=0.001$的独立性检验，分析超声波检查结果是否与患该疾病有关.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P\left(\chi^2\geq k\right)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【解答】（1） $p=\dfrac{180}{200}=\dfrac{9}{10}$

（2）

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{1000\times\left(20\times20-180\times780\right)^2}{800\times200\times200\times800}=765.625>10.828$$

所以根据小概率值$\alpha=0.001$的独立性检验，超声波检查结果与患该疾病有关.

16.（15 分）

设数列$\{a_n\}$满足$\dfrac{a_{n+1}}{n}=\dfrac{a_n}{n+1}+\dfrac{1}{n(n+1)}$， $a_1=3$

(1) 证明: $\{na_n\}$为等差数列;

(2) 设 $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$，求 $f'(-2)$。

【解答】解:（1）由$\dfrac{a_{n+1}}{n}=\dfrac{a_n}{n+1}+\dfrac{1}{n(n+1)}$，可得$(n+1)a_{n+1}=na_n+1$， $a_1=3$，故na_n是以3为首项，1为公差的等差数列， $na_n=n+2$；

（2） $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots a_mx^m$， $f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots ma_mx^{m-1}$

$f'(-2)=a_1\times(-2)^0+2a_2\times(-2)^1+3a_3\times(-2)^2+\cdots+ma_m\times(-2)^{m-1}$ ①

$-2f'(-2)=a_1\times(-2)^1+2a_2\times(-2)^2+3a_3\times(-2)^3+\cdots+(m-1)a_{m-1}\times(-2)^{m-1}+ma_m\times(-2)^m$ ②

①减②可得： $3f'(-2)=a_1\times(-2)^0+1\times(-2)^1+1\times(-2)^2+1\times(-2)^3+\cdots+1\times(-2)^{m-1}-ma_m\times(-2)^m$

即： $3f'(-2)=3+\dfrac{(-2)\times\left[1-(-2)^{m-1}\right]}{1-(-2)}-(m+2)\times(-2)^m$

化简可得： $f'(-2)=\dfrac{7}{9}-(\dfrac{m}{3}+\dfrac{7}{9})(-2)^m$.

17.（15 分）

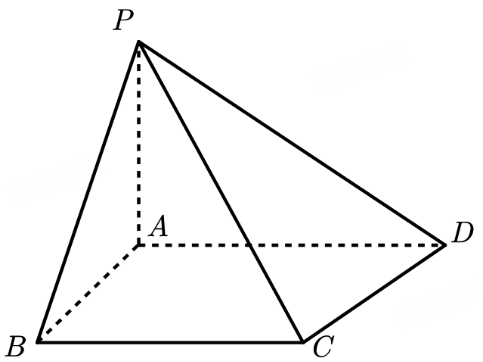
如图所示的四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA\perp$ 平面 $ABCD$， $BC\parallel AD$， $AB\perp AD$ 。

（1）证明:平面 $PAB\perp$ 平面 PAD

（2） $PA=AB=\sqrt{2}$， $AD=\sqrt{3}+1$， $BC=2$， P,B,C,D 在同一个球面上，设该球面的球心为 O 。

(i) 证明: O 在平面 $ABCD$ 上;

(ii)求直线 AC 与直线 PO 所成角的余弦值。



【解答】解:（1）由 $PA\perp$ 平面 $ABCD$， $AB\in$ 平面 $ABCD$

所以 $PA\perp AB$，又由 $AB\perp AD$， $PA\cap AD=D$， $PA,AD\in$ 平面 PAD

故 $AB\perp$ 平面 PAD，

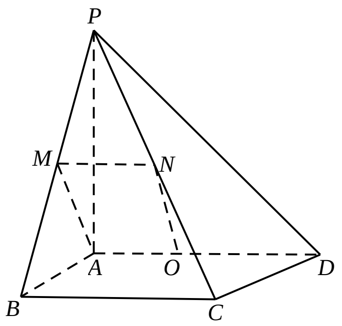
$AB\subset$ 平面 PAB，故平面 $PAB\perp$ 平面 PAD；

（2）（i）在线段 AD 取点 O，使得 $AO=1$，由 $PA=AB=\sqrt{2}$，

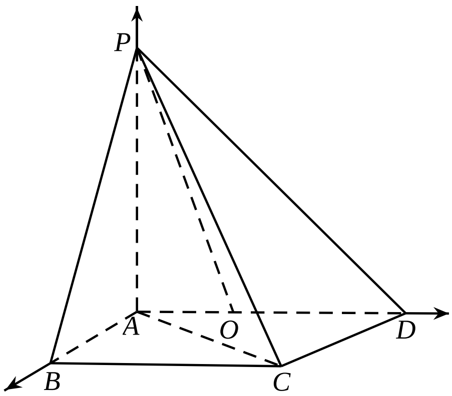
则 $PO=\sqrt{PA^2+AO^2}=\sqrt{3}$， $BO=\sqrt{AB^2+AO^2}=\sqrt{3}$

$OD=\sqrt{3}$， $OC=\sqrt{3}$，即平面 $ABCD$ 内的点 O 为 P， B， C， D 的球心；

（注球心 O 的几何构图可参考下图）



（ii）以 AB 、 AD 、 AP 分别为 x 、 y 、 z 轴，如图建系，



$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{2},2,0)$， $\overrightarrow{PO}=(0,1,-\sqrt{2})$

记直线 AC 与直线 PO 成角为 θ，则 $\cos\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PO}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{PO}\right|}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

18.（17 分）

设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，记 A 为椭圆下端点， B 为右端点，$|AB|=\sqrt{10}$，且椭圆 C 的离心率为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$。

(1) 求椭圆的标准方程；

(2) 设点 $P(m,n)$ 。

(i) 若 P 不在 y 轴上，设 Q 是射线 AP 上一点，$|AQ|\cdot|AP|=3$，用 m,n 表示点 Q 的坐标；

(ii) 设直线 OQ 的斜率为 k_1，直线 OP 的斜率为 k_2，若 $k_1=3k_2$， M 为椭圆上一点，求 $|PM|$的最大值。

【解答】解：（1） $A(0,-b)$， $B(a,0)$，

所以 $|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}$，又因为 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$， $a^2=b^2+c^2$，

所以 $a^2=9$， $b^2=1$， $c^2=8$，

所以椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$；

（2）（i）由（1）得， $A(0,-1)$，因为 $P(m,n)$，

所以 $\overrightarrow{AP}=(m,n+1)$，

设 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AP}$， $\lambda\in(0,+\infty)$，

$|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AQ}|=\lambda|\overrightarrow{AP}|^2=\lambda[m^2+(n+1)^2]=3$，

所以 $\lambda=\dfrac{3}{m^2+(n+1)^2}$，

所以 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AP}=\left(\dfrac{3m}{m^2+(n+1)^2},\dfrac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}\right)$，

所以 $Q\left(\dfrac{3m}{m^2+(n+1)^2},\dfrac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1\right)$；

（ii）由（i）得， $k_1=\dfrac{3(n+1)-m^2-(n+1)^2}{3m}$， $k_2=\dfrac{n}{m}$，

因为 $k_1=3k_2$，

所以 $\dfrac{3(n+1)-m^2-(n+1)^2}{3m}=\dfrac{3n}{m}$，

整理得 $m^2+n^2+8n-2=0$， 即 $m^2+(n+4)^2=18$，

所以 P 在圆心为 $N(0,-4)$，半径为 $3\sqrt{2}$ 的圆上，

设 $M(x_0,y_0)$， 所以 $\dfrac{{x_0}^2}{9}+{y_0}^2=1$， 即 ${x_0}^2+9{y_0}^2=9$，

$|MN|^2=x_0{}^2+(y_0+4)^2=9-9y_0{}^2+y_0{}^2+8y_0+16$

$=-8y_0{}^2+8y_0+25=-(y_0-\dfrac{1}{2})^2+27$，

因为$M(x_0,y_0)$在椭圆$\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$上，所以$y_0\in[-1,1]$，

所以当$y_0=\dfrac{1}{2}$时，$|MN|_{\max}=3\sqrt{3}$，

所以$|PM|$的最大值为$3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$.

19.（17 分）

(1)设函数 $f(x)=5\cos x-\cos 5x$，求 $f(x)$ 在$[0,\dfrac{\pi}{4}]$的最大值；

(2)给定$\theta\in(0,\pi)$， a为给定实数，证明:存在$y\in[a-\theta,a+\theta]$，使得$\cos y\le\cos\theta$；

(3)若存在φ，使得对任意x，都有$5\cos x-\cos(5x+\varphi)\le b$，求$b$的最小值.

【解答】：解（1）方法一：

$\cos(5x)=\cos(x+4x)(x+4x)=\cos x\cos 4x-\sin x\sin 4x$

$=\cos x\,(2\cos^2 2x-1)-\sin x\cdot 2\sin 2x\cos 2x$

$=\cos x\,(2(2\cos^2 x-1)^2-1)-4\sin^2 x\cos x\,(2\cos^2 x-1)$

$=\cos x\,(2(4\cos^4 x-4\cos^2 x+1)-1)-4(1-\cos^2 x)(2\cos^3 x-\cos x)$

$=8\cos^5 x-8\cos^3 x+\cos x-4(2\cos^3 x-\cos x-2\cos^5 x+\cos^3 x)$

$=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x$

$f(x)=5\cos x-\cos 5x=-16\cos^5 x+20\cos^3 x$

令$t=\cos x$，则$t\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$.

$g(t)=-16t^5+20t^3$.

$g'(t)=-80t^4+60t^2=20t^2(-4t^2+3)$

令$g'(t)=0$，结合t的取值范围可得$t=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

容易验证$t=\frac{\sqrt{3}}{2}$是极大值点，也是$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$内的最大值点，

代入$g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\sqrt{3}$，此时对应$x=\frac{\pi}{6}$.

故$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$的最大值为$3\sqrt{3}$.

方法二：

求导得：

$$f'(x)=-5\sin x+5\sin 5x=5(\sin 5x-\sin x)=5[\sin(3x+2x)-\sin(3x-2x)]$$

$$=5(\sin 3x\cos 2x+\cos 3x\sin 2x-\sin 3x\cos 2x+\cos 3x\sin 2x)$$

$$=10\cos 3x\sin 2x$$

因为$x\in[0,\frac{\pi}{4}]$，所以$2x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$3x\in[0,\frac{3\pi}{4}]$，

则$\sin 2x\geq 0$，

即有$x\in[0,\frac{\pi}{6}]$时，$f'(x)\geq 0$，$f(x)$单调递增；

$x\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$时，$f'(x)\leq 0$，$f(x)$单调递减.

所以$f_{\max}(x)=f(\frac{\pi}{6})=5\times\frac{\sqrt{3}}{2}-(-\frac{\sqrt{3}}{2})=3\sqrt{3}$，

即$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{4}]$的最大值为$3\sqrt{3}$.

(2) 当$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$\cos\theta>0$.

于是 $\cos(a-\theta)+\cos(a+\theta)=2\cos a\cos\theta\leq 2\cos\theta$，

故必存在$y\in\{a-\theta,a+\theta\}$使得$\cos y\leq\cos\theta$

当$\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，不妨设$a\in[0,2\pi)$，则$a+\theta\geq 0$.

若$a+\theta\le\pi$，则$\cos(a+\theta)\le\cos\theta$，取$y=a+\theta$即可.

若$a+\theta>\pi\ge a-\theta$，则取$y=\pi$即可.

若$a-\theta>\pi$，由$a<2\pi$得$\pi<a-\theta<2\pi-\theta$，

则$\cos(a-\theta)<\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$. 取$y=a-\theta$即可.

(3)固定φ，定义关于x的函数$h(x)=5\cos x-\cos(5x+\varphi)$.

考虑$(h(x))_{max}$的取值. 由余弦函数的周期性，只需要考虑$\varphi\in[0,2\pi]$的情形.

由$(5\cos x-\cos(5x+\varphi))_{max}=(5\cos(-x)-\cos(-5x+\varphi))_{max}$

$=(5\cos x-\cos(\varphi-5x))_{max}=(5\cos x-\cos(5x-\varphi))_{max}$

$=(5\cos x-\cos(5x+2\pi-\varphi))_{max}$，

因此只需要考虑$\varphi\in[0,\pi]$的情形.

取$x=\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{5}$，此时$\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{5}\in\left[-\frac{\pi}{30},\frac{\pi}{6}\right]$，

$h\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{5}\right)=5\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{5}\right)-\cos\frac{5}{6}\pi\ge5\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

故对任意的φ都存在x使得$h(x)\ge3\sqrt{3}$，故$b\ge3\sqrt{3}$.

而当$\varphi=0$时，由(1)中方法一可知（利用方法二的函数则判断极值较为复杂）

$g(t)=-16t^5+20t^3$ ，$t\in[-1,1]$，

$g'(t)=-80t^4+60t^2=20t^2(-4t^2+3)$ ，

则 g 在$[-1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$单调递减，$[-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$单调递增，$[\dfrac{\sqrt{3}}{2},1]$单调递减，

因为$g(\dfrac{\sqrt{3}}{2})=3\sqrt{3}$ ，$g(-1)=4<3\sqrt{3}$，

所以当$\varphi=0$时，$h(x)=5\cos x-\cos(5x)\le3\sqrt{3}$，故$b$可以取$3\sqrt{3}$. 因此$b_{min}=3\sqrt{3}$.